$4^η$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

31.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u}=(-6,\ 8)$ και $\vec{v}=(9,\ -12)$

i) Δείξτε ότι είναι αντίρροπα

ii) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει ημιάξονες τα μέτρα των διανυσμάτων, κέντρο την αρχή των αξόνων και εστίες στον y΄y

iii) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο K(20, 0)

Προτεινόμενη λύση

i)

$\vec{u} = (-6,\ 8) = -\frac{2}{3}(9,\ -12) = -\frac{2}{3}\vec{v}$

Και επειδή $-\frac{2}{3} < 0$, θα είναι $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$

ii)

$|\vec{u}| = \sqrt{36+64} = 10$ και $|\vec{v}| = \sqrt{81+144} = 15$

Επομένως η έλλειψη έχει ημιάξονες $α = 15$ και $β = 10$

Η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$

iii)

Αν (x_1, y_1) είναι το σημείο επαφής τότε η εφαπτομένη σ' αυτό έχει εξίσωση

Εξίσωση εφαπτομένης : $\frac{xx_1}{100} + \frac{yy_1}{225} = 1$ όπου (x_1, y_1) το σημείο επαφής

Διέρχεται από το σημείο K(20, 0) $\Rightarrow \frac{20 \cdot x_1}{100} = 1 \Rightarrow x_1 = 5$

Το σημείο (x_1, y_1) ανήκει στην έλλειψη $\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{100} + \frac{y_1^2}{225} = 1$

$$\frac{25}{100} + \frac{y_1^2}{225} = 1$$

$$\frac{y_1^2}{225} = \frac{75}{100} \Leftrightarrow y_1 = \pm\frac{15}{2}\sqrt{3}$$

Η εξίσωση εφαπτομένης $\Leftrightarrow \frac{x \cdot 5}{100} \pm \frac{y \cdot \frac{15}{2}\sqrt{3}}{225} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{20} \pm \frac{y\sqrt{3}}{30} = 1$

32.

Έστω οι αριθμοί $\alpha = 2\kappa + 2$ και $\beta = 6\kappa + 7$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι

i) Ο α^2 είναι άρτιος και ο β^2 περιττός

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $2\beta - \alpha$ με το 10 είναι 2

iii) Αν ο κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε $7 \mid (\alpha + \beta - 2)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha^2 = (2\kappa + 2)^2 = 4\kappa^2 + 8\kappa + 4$

$= 2(2\kappa^2 + 4\kappa + 2) = 2\lambda$, άρτιος (όπου $\lambda = 2\kappa^2 + 4\kappa + 2 \in \mathbb{Z}$)

$\beta^2 = (6\kappa + 7)^2 = 36\kappa^2 + 84\kappa + 49 =$

$= 36\kappa^2 + 84\kappa + 48 + 1 =$

$= 2(18\kappa^2 + 42\kappa + 24) + 1$

$= 2\mu + 1$ περιττός, (όπου $\mu = 18\kappa^2 + 42\kappa + 24 \in \mathbb{Z}$)

ii)

$2\beta - \alpha = 12\kappa + 14 - 2\kappa - 2$

$= 10\kappa + 12$

$= 10\kappa + 10 + 2$

$= 10(\kappa + 1) + 2 = 10\pi + 2$ το υπόλοιπο είναι 2 (όπου $\pi = \kappa + 1 \in \mathbb{Z}$)

iii)

$\alpha + \beta - 2 = 2\kappa + 2 + 6\kappa + 7 - 2 = 8\kappa + 7$

Αλλά $\kappa = 7\rho$, $\rho \in \mathbb{Z}$, άρα $\alpha + \beta - 2 = 8 \cdot 7\rho + 7$

$= 7(8\rho + 1) = 7\nu$, όπου $\nu = 8\rho + 1 \in \mathbb{Z}$

Επομένως $7 \mid (\alpha + \beta - 2)$.

33.

Σε επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α , Β, Γ, Δ, Ρ, Κ, Λ, Μ

i) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΒΓ}=\overrightarrow{ΑΓ}+\overrightarrow{ΒΔ}$

ii) Αν ισχύει $\overrightarrow{ΡΑ}+3\overrightarrow{ΡΒ}-4\overrightarrow{ΡΓ}=\vec{0}$

α) Δείξτε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) Ποιο από τα Α, Β, Γ είναι μεταξύ των άλλων δύο;

iii) Αν $2\overrightarrow{ΑΛ}+3\overrightarrow{ΒΛ}+2\overrightarrow{ΜΒ}=\overrightarrow{ΑΚ}+\overrightarrow{ΑΜ}+\overrightarrow{ΒΚ}$

να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΚΛ}$, $\overrightarrow{ΜΛ}$ είναι αντίρροπα.

Προτεινόμενη λύση

i)

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α : $\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΒΓ}=\overrightarrow{ΑΓ}+\overrightarrow{ΒΔ} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΑΓ}-\overrightarrow{ΑΒ}=\overrightarrow{ΑΓ}+\overrightarrow{ΑΔ}-\overrightarrow{ΑΒ} \Leftrightarrow$

$\vec{0}=\vec{0}$

ii) α)

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α : $\overrightarrow{ΡΑ}+3\overrightarrow{ΡΒ}-4\overrightarrow{ΡΓ}=\vec{0} \Rightarrow$

$-\overrightarrow{ΑΡ}+3(\overrightarrow{ΑΒ}-\overrightarrow{ΑΡ})-4(\overrightarrow{ΑΓ}-\overrightarrow{ΑΡ})=\vec{0}$

$-\overrightarrow{ΑΡ}+3\overrightarrow{ΑΒ}-3\overrightarrow{ΑΡ}-4\overrightarrow{ΑΓ}+4\overrightarrow{ΑΡ}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{ΑΒ}-4\overrightarrow{ΑΓ}=\vec{0}$

$\overrightarrow{ΑΒ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{ΑΓ}$

$\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$ συγγραμμικά

Α, Β, Γ συνευθειακά

> Σαν σημείο αναφοράς επιλέγουμε οποιοδήποτε σημείο του αποδεικτέου

ii) β)

Επειδή $\frac{4}{3}>0$, τα $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$ είναι ομόρροπα.

Επειδή $|\overrightarrow{ΑΒ}|=\frac{4}{3}|\overrightarrow{ΑΓ}|$, δηλαδή ΑΒ > ΑΓ, το Γ είναι εσωτερικό του τμήματος ΑΒ

iii)

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Κ :

$2\overrightarrow{ΑΛ}+3\overrightarrow{ΒΛ}+2\overrightarrow{ΜΒ}=\overrightarrow{ΑΚ}+\overrightarrow{ΑΜ}+\overrightarrow{ΒΚ} \Leftrightarrow$

$2(\overrightarrow{ΚΛ}-\overrightarrow{ΚΑ})+3(\overrightarrow{ΚΛ}-\overrightarrow{ΚΒ})+2(\overrightarrow{ΚΒ}-\overrightarrow{ΚΜ})=-\overrightarrow{ΚΑ}+(\overrightarrow{ΚΜ}-\overrightarrow{ΚΑ})-\overrightarrow{ΚΒ}$

$2\overrightarrow{ΚΛ}-2\overrightarrow{ΚΑ}+3\overrightarrow{ΚΛ}-3\overrightarrow{ΚΒ}+2\overrightarrow{ΚΒ}-2\overrightarrow{ΚΜ}=-\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΚΜ}-\overrightarrow{ΚΑ}-\overrightarrow{ΚΒ}$

$5\overrightarrow{ΚΛ}=3\overrightarrow{ΚΜ}$

$5\overrightarrow{ΚΛ}=3(\overrightarrow{ΚΛ}+\overrightarrow{ΛΜ})$

$2\overrightarrow{ΚΛ}=3\overrightarrow{ΛΜ}$

$2\overrightarrow{ΚΛ}=-3\overrightarrow{ΜΛ}$

$\overrightarrow{ΚΛ}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{ΜΛ} \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{ΚΛ}$, $\overrightarrow{ΜΛ}$ αντίρροπα (αφού $-\frac{3}{2}<0$)

34.

Δίνονται τα σημεία $A(2,\ 1)$, $B(6,\ 4)$ και $\Gamma\left(\frac{9}{2},\ 6\right)$.

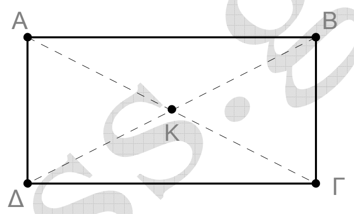
i) Δείξτε ότι η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι ορθή.
ii) Βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.
iii) Βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\lambda_{BA} = \frac{1-4}{2-6} = \frac{3}{4} \quad , \quad \Lambda_{B\Gamma} = \frac{6-4}{\frac{9}{2}-6} = -\frac{4}{3}$$

$$\lambda_{BA}\cdot\lambda_{B\Gamma} = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad AB \perp B\Gamma \quad \Rightarrow \quad A\hat{B}\Gamma = 90^o$$



ii)

ΑΒΓΔ ορθογώνιο $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad (x-2,\ y-1) = \left(\frac{9}{2}-6,\ 6-4\right)$$

$$x-2 = -\frac{3}{2} \quad \text{και} \quad y-1 = 2$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y = 3 \qquad \text{Άρα} \quad \Delta\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$$

iii)

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου θα είναι το μέσο της υποτείνουσας ΑΓ, δηλαδή το Κ, και η ακτίνα ρ του κύκλου θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΑΓ.

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{2+\frac{9}{2}}{2} = \frac{13}{4} \quad , \quad y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} \qquad \text{άρα} \quad K\left(\frac{13}{4},\ \frac{7}{2}\right)$$

$$\rho = \frac{1}{2}A\Gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2-\frac{9}{2}\right)^2 + (1-6)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

Ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση : $\left(x-\frac{13}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{16}$

35.

Α. Στον παρακάτω πίνακα να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις

Στήλη Α	**Στήλη Β**
i) Κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$	**α)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
ii) Ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$	**β)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
iii) Αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$	**γ)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$
	δ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$

Β. Στον παρακάτω πίνακα στη στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις ευθειών και στη Β τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα . Να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις .

Στήλη Α	**Στήλη Β**
i) $y = 3x - 5$	**α)** $(-2,\ 7)$
ii) $y = -7$	**β)** $(3,\ -1)$
iii) $x = 1$	**γ)** $(1,\ 3)$
	δ) $(4,\ 0)$
	ε) $(0,\ -3)$

Γ. Στον παρακάτω πίνακα στην στήλη Α δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στην στήλη Β ονομασίες γραμμών του επιπέδου. Κάντε τις σωστές αντιστοιχίσεις

Στήλη Α	**Στήλη Β**
i) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,\quad \alpha > 0,\ \beta > 0$	**α)** Κύκλος
ii) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,\quad \alpha > 0,\ \beta > 0$	**β)** Ευθεία
iii) $y^2 = 2px,\quad p > 0$	**γ)** Υπερβολή
iv) $x^2 + y^2 = \rho^2\ ,\quad \rho > 0$	**δ)** Παραβολή
	ε) Έλλειψη

Προτεινόμενη λύση

Α.

$i \to \gamma$, $ii \to \alpha$, $iii \to \beta$

Β.

$i \to \beta$, $ii \to \varepsilon$, $iii \to \delta$

Γ.

$i \to \varepsilon$, $ii \to \gamma$, $iii \to \delta$, $iv \to \alpha$

36.

Έστω η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 2y + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

ii) Για ποια από αυτές τις τιμές ο κύκλος περνάει από την αρχή των αξόνων;

iii) Για $\alpha = -1$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία τομής του κύκλου με τους άξονες.

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει και αρκεί $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 4 + 4 - 4(\alpha^2 + 2\alpha + 1) > 0$

$$1 + 1 - (\alpha^2 + 2\alpha + 1) > 0$$
$$2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1 > 0$$
$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 < 0$$
$$-1 - \sqrt{2} < \alpha < -1 + \sqrt{2}$$

ii)

Πρέπει και αρκεί $0^2 + 0^2 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$$
$$\alpha = -1$$

iii)

Για $\alpha = -1$ η εξίσωση του κύκλου γίνεται $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ **(1)**

Για $x = 0$ η (1) γίνεται $y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 2$

Για $y = 0$ η (1) γίνεται $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$

Επομένως τα σημεία τομής του κύκλου με τους άξονες είναι τα

$O(0, 0)$, $A(0, 2)$, $B(2, 0)$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $E = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$ τ. μονάδες

37.

i) Να βρείτε φυσικό αριθμό ν έτσι ώστε διαιρούμενος με το 45 να δίνει υπόλοιπο ίσο με το τετράγωνο του πηλίκου.

ii) Δείξτε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ο 4 δεν διαιρεί τον $\nu^2 + 2$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της διαίρεσης $\nu : 45$.

Τότε $\quad \nu = 45\pi + \upsilon \quad$ με $\quad \pi, \upsilon \in \mathbb{N} \quad$ και $\quad 0 \le \upsilon < 45 \quad$ και $\quad \upsilon = \pi^2$

$\nu = 45\pi + \pi^2 \quad$ και $\quad 0 \le \pi^2 < 45$

$\nu = 45\pi + \pi^2 \quad$ και $\quad 0 \le \pi < \sqrt{45}$

$\nu = 45\pi + \pi^2 \quad$ και $\quad \pi = 0, 1, 2, \ldots, 5, 6$

Για $\pi = 0$ είναι $\nu = 45\cdot 0 + 0^2 = 0$

Για $\pi = 1$ είναι $\nu = 45\cdot 1 + 1^2 = 46$

Για $\pi = 2$ είναι $\nu = 45\cdot 2 + 2^2 = 94$

Για $\pi = 3$ είναι $\nu = 45\cdot 3 + 3^2 = 144$

Για $\pi = 4$ είναι $\nu = 45\cdot 4 + 4^2 = 196$

Για $\pi = 5$ είναι $\nu = 45\cdot 5 + 5^2 = 250$

Για $\pi = 6$ είναι $\nu = 45\cdot 6 + 6^2 = 306$

ii)

Έστω ότι $4 | (\nu^2 + 2)$ τότε θα υπάρχει ακέραιος κ ώστε $\quad \nu^2 + 2 = 4\kappa \quad$ **(1)**

- Όταν $\nu = 2\rho$ (άρτιος), η (1) $\Rightarrow$ $4\rho^2 + 2 = 4\kappa$
  $2 = 4\kappa - 4\rho^2$
  $2 = 4(\kappa - \rho^2)$
  $4 | 2$ που είναι άτοπο
- Όταν $\nu = 2\rho + 1$ (περιττός), η (1) $\Rightarrow$ $4\rho^2 + 4\rho + 1 + 2 = 4\kappa$
  $3 = 4\kappa - 4\rho^2 - 4\rho$
  $3 = 4(\kappa - \rho^2 - \rho)$
  $4 | 3$ που είναι άτοπο

Οπότε ο 4 δεν διαιρεί τον $\nu^2 + 2$.

38.

i) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda x-3\lambda^2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ **(1)** παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

ii) Συναρτήσει του λ να βρεθεί το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται το σημείο τομής.

Προτεινόμενη λύση

i)

Θεωρούμε την (1) σαν εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο y και βρίσκουμε τις ρίζες της.

(1) $\Leftrightarrow$ $y^2+4\lambda y-x^2+2\lambda x+3\lambda^2=0$,

$$\begin{aligned}\Delta &= 16\lambda^2+4(x^2-2\lambda x-3\lambda^2)\\ &= 4x^2-8\lambda x+4\lambda^2\\ &= 4(x^2-2\lambda x+\lambda^2)\\ &= 4(x-\lambda)^2\end{aligned}$$

$$y_{1,2}=\frac{-4\lambda\pm\sqrt{4(x-\lambda)^2}}{2}=\frac{-4\lambda\pm2(x-\lambda)}{2}=-2\lambda\pm(x-\lambda)$$

Οπότε $y=-2\lambda+x-\lambda$ ή $y=-2\lambda-x+\lambda$ $\Leftrightarrow$
$y=x-3\lambda$ ή $y=-x-\lambda$

Επομένως η (1) παριστάνει τις ευθείες (ε_1) , (ε_2)

Είναι $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ $\Rightarrow$ $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)$

ii)

Λύνοντας το σύστημα των $y=x-3\lambda$, $y=-x-\lambda$ βρίσκουμε
$x=\lambda$ και $y=-2\lambda$

άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το $M(\lambda, -2\lambda)$

iii)

Αν $M(x, y)$ τυχαία θέση του Μ, τότε $x=\lambda$ και $y=-2\lambda$ $\Leftrightarrow$
$x=\lambda$ και $y=-2x$

Άρα το Μ κινείται στην ευθεία $y=-2x$.

39.

i) Αν για τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $5\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\mu\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, να βρείτε τις τιμές των λ και μ.

ii) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, δείξτε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τα διανύσματα $\vec{\upsilon}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\vec{\nu}=\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$.

Προτεινόμενη λύση

$5\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\mu\vec{\alpha}+3\vec{\beta} \Leftrightarrow 5\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}-\mu\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=\vec{0}$

$(5-\mu)\vec{\alpha}+(\lambda-3)\vec{\beta}=\vec{0}$ **(1)**

Αν $5-\mu\neq 0$ δηλαδή $\mu\neq 5$, η (1) $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}=\dfrac{3-\lambda}{5-\mu}\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ συγγραμμικά, άτοπο.

Επομένως είναι $5-\mu=0$, δηλαδή $\mu=5$, οπότε η (1) $\Rightarrow$ $(\lambda-3)\vec{\beta}=\vec{0}$

$\lambda-3=0$

$\lambda=3$

Είναι $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, διότι αν ήταν $\vec{\beta}=\vec{0}$, θα ήταν συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$.

ii)

Έστω ότι τα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\nu}$ είναι συγγραμμικά

Τότε θα υπάρχει πραγματικός αριθμός λ έτσι ώστε $\vec{\upsilon}=\lambda\vec{\nu} \Leftrightarrow$

$2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=\lambda(\vec{\alpha}-4\vec{\beta})$

$2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}-4\lambda\vec{\beta}$

$\lambda\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}=3\vec{\beta}+4\lambda\vec{\beta}$

$(\lambda-2)\vec{\alpha}=(3+4\lambda)\vec{\beta}$ **(2)**

Αν ήταν $\lambda-2\neq 0$ δηλαδή $\lambda\neq 2$, η (2) $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}=\dfrac{3+4\lambda}{\lambda-2}\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά, άτοπο

Επομένως είναι $\lambda=2$, οπότε η (2) γίνεται $(3+4\lambda)\vec{\beta}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$3+4\lambda=0$

$\lambda=-\dfrac{4}{3}$ άτοπο αφού $\lambda=2$

Είναι $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, διότι αν ήταν $\vec{\beta}=\vec{0}$, θα ήταν συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$.

40.

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(8, 0)$, $O(0, 0)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = -2$

ii) Του παραπάνω κύκλου να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο του $A(8, 0)$

iii) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + 8$ να είναι τέμνουσα του κύκλου.

Προτεινόμενη λύση

i)

Προφανώς η χορδή ΟΑ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -2$.

Το κέντρο $K(x_o, y_o)$ του ζητούμενου κύκλου ανήκει στη μεσοκάθετο ΚΒ της χορδής ΟΑ.

Η εξίσωση της ΚΒ είναι $x = 4$, οπότε $B(4, -2)$ και $K(4, y_o)$

$(KO) = (KB) \Leftrightarrow (KO)^2 = (KB)^2$

$(0-4)^2 + (0-y_o)^2 = (4-4)^2 + (-2-y_o)^2$

$16 + y_o^2 = 4 + 4y_o + y_o^2$

$4y_o = 12$

$y_o = 3$

$(KB)^2 = (4-4)^2 + (-2-3)^2 = 25 \Rightarrow \rho = KB = 5$

Άρα ο ζητούμενος κύκλος είναι $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

ii)

Είναι $\lambda_{KA} = \dfrac{0-3}{8-4} = -\dfrac{3}{4}$

Εφαπτομένη $\perp$ ΚΑ $\Rightarrow \lambda_{KA} \cdot \lambda_{\varepsilon\varphi} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = \dfrac{4}{3}$

Εξίσωση της εφαπτομένης : $y - 0 = \dfrac{4}{3}(x-8) \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{32}{3}$

iii)

$(\varepsilon): y = \lambda x + 8 \Leftrightarrow \lambda x - y + 8 = 0$

(ε) τέμνουσα του κύκλου $\Leftrightarrow d(K, \varepsilon) < \rho$

$\dfrac{|4\lambda - 3 + 8|}{\sqrt{\lambda^2+1}} < 5$

$|4\lambda + 5| < 5\sqrt{\lambda^2+1}$

$16\lambda^2 + 40\lambda + 25 < 25\lambda^2 + 25$

$9\lambda^2 - 40\lambda > 0$

$\lambda(9\lambda - 40) > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$ ή $\lambda > \dfrac{40}{9}$